FUNCIONES MATEMÁTICAS.

1. Competencias	Plantear y solucionar problemas con base en los principios y teorías de física, química y matemáticas, a través del método científico para sustentar la toma de decisiones en los ámbitos científico y tecnológico.
2. Cuatrimestre	Segundo
3. Horas Teóricas	19
4. Horas Prácticas	41
5. Horas Totales	60
6. Horas Totales por Semana Cuatrimestre	4
7. Objetivo de aprendizaje	El alumno desarrollará modelos matemáticos empleando las herramientas de geometría, trigonometría, geometría analítica y álgebra vectorial para contribuir a la solución de problemas de su entorno y las ciencias básicas.

Unidades de Aprendizaje	**Horas**		
	Teóricas	**Prácticas**	**Totales**
I. **Geometría y Trigonometría**	5	11	16
II. **Geometría Analítica**	5	11	16
III. **Funciones**	5	11	16
IV. **Álgebra Vectorial**	4	8	12
Totales	**19**	**41**	**60**

UNIDADES TEMÁTICAS

1. Unidad Temática I.- Geometría y trigonometría

2. Horas Prácticas 5

3. Horas Teóricas 11

4. Horas Totales 16

5. Objetivo

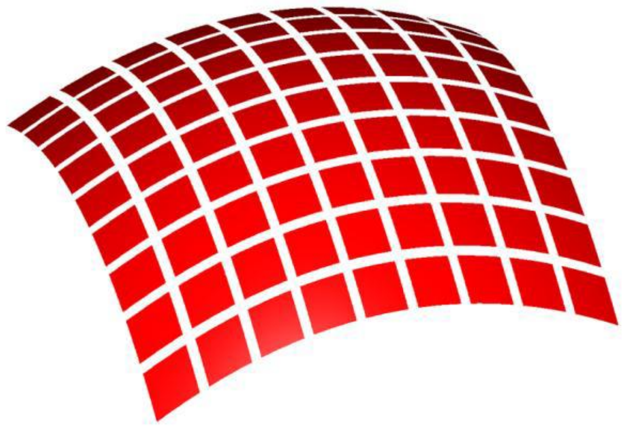
El alumno resolverá problemas de geometría y trigonometría para contribuir a la interpretación y solución de problemas de su entorno.

1. Perímetro, área y volumen

1.1. Definición.

Perímetro. - El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados.

Área. - El área es una medida de extensión de una superficie, expresada en unidades de medida denominadas unidades de superficie. Cuando se mide una región en el plano, a esta medida se la denomina “área de la región del plano”. A la unidad utilizada para medir el área se la llama unidad cuadrada porque es un cuadrado con lados de longitud l. Una superficie es de hecho un conjunto de puntos de un espacio euclídeo que forma un espacio topológico bidimensional que localmente, es decir, visto de cerca se parece al espacio euclídeo bidimensional. Así alrededor de cada punto de una superficie esta se aproxima bien por el plano tangente a la superficie en dicho punto.



Volumen. - El concepto volumen proviene del latín volúmen. El volumen como magnitud es entendido como el espacio que ocupa un cuerpo. La misma posee tres dimensiones, alto, ancho y largo.

Según el Sistema Internacional de Unidades, el volumen es representado por el metro cúbico. En la vida cotidiana el litro también puede ser considerado como una unidad del volumen. Además este sistema permite catalogar al volumen en tres clases. En primer lugar pueden ser mencionadas las unidades de capacidad. Este tipo de unidades son utilizadas para calcular el espacio que ocupan las cosechas que se hayan almacenadas, por ejemplo gracias a ella se calcula el volumen de papas, zanahorias, manzanas, etc. Si bien este sistema ya ha sido remplazado por nuevas tecnologías, en la antigüedad resultaba una práctica corriente ya que no existían otros métodos más adecuados. En segundo lugar pueden ser mencionadas las unidades de volumen en estado líquido. Este tipo de unidades se utilizan para calcular el espacio que ocupan los líquidos cuando se encuentran en un recipiente. La unidad elemental es en este caso el decímetro cúbico. En tercer y último lugar se pueden mencionar las unidades de volumen en estado sólido. En este caso el volumen es calculado por medio de unidades que son elevadas a la tercera potencia. Estas serán siempre unidades de longitud. Esta es una práctica muy utilizada en la disciplina de la geometría y es de allí de donde proviene su nombre. En este caso el metro cúbico es la unidad elemental.

Uno de sus múltiplos es el kilómetro cúbico, mientras que uno de sus submúltiplos es el centímetro cúbico.

El concepto de volumen se encuentra asociado al de capacidad. La capacidad hace referencia al espacio de alguna cosa, donde puede ser contenida otra cosa. La unidad de capacidad es el litro. El cual resulta equivalente a la unidad del volumen en estado líquido, el decímetro cúbico, como ya ha sido mencionado anteriormente.

Algunas aplicaciones de perímetro, área y volumen

o Determinar el área del piso que se va a alfombrar.

o Calcular el número de cuadrados de tejas necesarios para cubrir una sección de 100 pies^2.

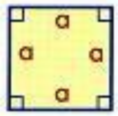
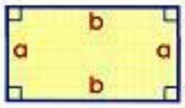
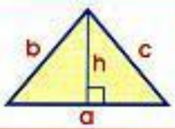
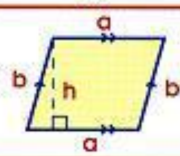
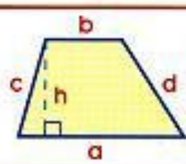
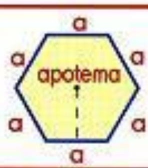
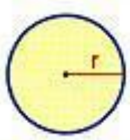
o Estipular el número de latas de pintura se deben comprar para cubrir las paredes de una habitación.

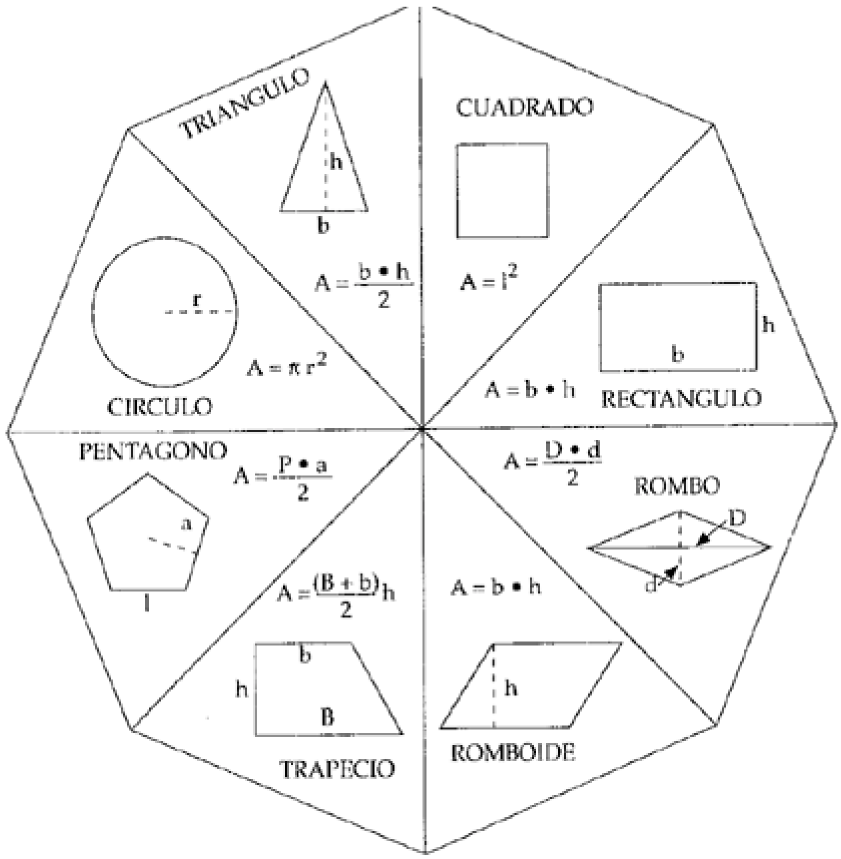
o ¿Cuántas bolsas de fertilizantes se necesitan para un jardín sabiendo que una bolsa puede cubrir 100 pies cuadrados (30,04 metros)?

o El jardín tiene dimensiones de 40 pies por 20 pies. Se quiere vallarlo, por lo tanto, ¿cuántos metros de vallas se necesitarán?

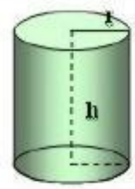
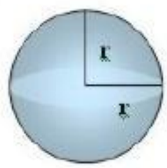
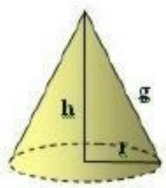
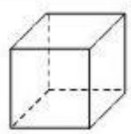
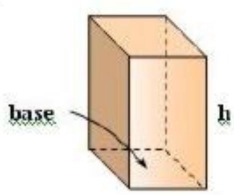
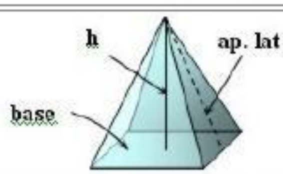
o En el caso de verter mezcla en una pasarela o arena para llenar una caja de arena, es necesario calcular el volumen del espacio tridimensional.

1.2. Identificar figuras, cuerpos geométricos y sus elementos.

Figura Geométrica	Perímetro	Área
cuadrado 	$a + a + a + a = 4a$	$a \cdot a = a^2$
rectángulo 	$a + a + b + b = 2a + 2b$	$a \cdot b = ab$
triángulo 	$a + b + c$	$\frac{a \cdot h}{2}$
rombo 	$a + a + a + a = 4a$	$\frac{d \cdot c}{2}$
paralelogramo 	$a + a + b + b = 2a + 2b$	$a \cdot h$
trapecio 	$a + b + c + d$	$\frac{a + b}{2} \cdot h$
polígono regular 	n = número de lados del polígono $\underbrace{a + a + a + \ldots}_{n \text{ veces}} = n \cdot a$	$\frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$
circunferencia y círculo 	$\pi \simeq 3{,}14$ $2 \pi r$	πr^2


TRIANGULO
$A = \frac{b \bullet h}{2}$
CUADRADO
$A = l^2$
RECTANGULO
$A = b \bullet h$
CIRCULO
$A = \pi r^2$
PENTAGONO
$A = \frac{P \bullet a}{2}$
ROMBO
$A = \frac{D \bullet d}{2}$
TRAPECIO
$A = \frac{(B + b)}{2}h$
ROMBOIDE
$A = b \bullet h$

Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{total} = 2\pi r\ (h + r)$	$V = \pi\ r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{total} = 4\pi\ r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cono		$A_{total} = \pi\ r^2 + \pi\ r\ g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		$A = 6\ a^2$	$V = a^3$
Prisma		$A = (\text{perim.base} \times h) + 2 \cdot \text{area base}$	$V = \text{área base} \times h$
Pirámide		$A = \frac{\text{perim.base} \times \text{ap lat}}{2} + \text{area base}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$

Poliedros regulares

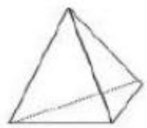
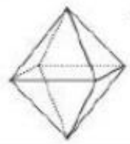
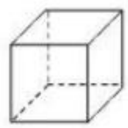
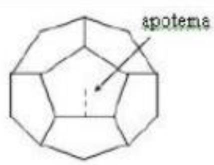
Figura	Esquema	Nº de caras	Área
Tetraedro		**4 caras, triángulos equiláteros**	$A = a^2 \cdot \sqrt{3}$
Octaedro		**8 caras, triángulos equiláteros**	$A = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$
Cubo		**6 caras, cuadrados**	$A = 6\ a^2$
Dodecaedro		**12 caras, pentágonos regulares**	$A = 30 \cdot a \cdot ap.$
Icosaedro		**20 caras, triángulos equiláteros**	$A = 5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$

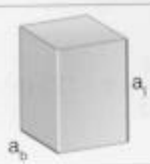
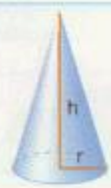
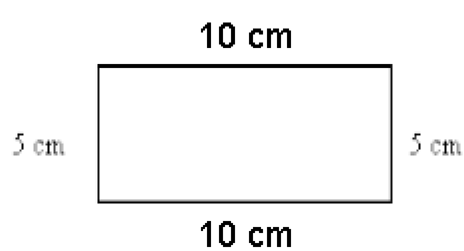
Figura	*Nombre*	*Área*
	Tetraedro	$\mathbf{A} = \sqrt{3}a^2$
	Octaedro	$\mathbf{A} = 2\sqrt{3}a^2$
	Icosaedro	$\mathbf{A} = 5\sqrt{3}a^2$
	Hexaedro (cubo)	$\mathbf{A} = 6a^2$
	Dodecaedro	$\mathbf{A} = 30a \cdot ap$
	Prisma regular	$\mathbf{A} = P_b \cdot a_l + 2A_b$
	Pirámide regular	$\mathbf{A} = \dfrac{P_b \cdot ap}{2} + A_b$
	Cilindro	$\mathbf{A} = 2\pi r\,(g + r)$
	Cono	$\mathbf{A} = \pi r\,(g + r)$
	Esfera	$\mathbf{A} = 4\pi r^2$

Figura	*Nombre*	*Volumen*
	Hexaedro (cubo)	$V = a^3$
	Prisma regular	$V = A_b \cdot h$
	Pirámide regular	$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$
	Cilindro	$V = \pi r^2 \cdot h$
	Cono	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$
	Esfera	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

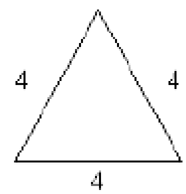
1.3. Explicar fórmulas de perímetro, área y volumen.

Perímetro: es la suma de los lados de una figura geométrica. Es su contorno. Los lados del rectángulo de la figura miden 10 cm. y 5 cm.

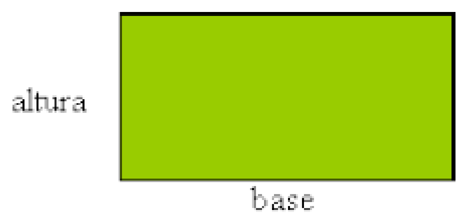


El perímetro del rectángulo lo obtenemos sumando todos sus lados: Perímetro = 10 cm+5 cm+10 cm+5 cm = 30 cm. Por lo tanto, el perímetro del rectángulo es 30 cm.

Los lados del triángulo miden 4 m.

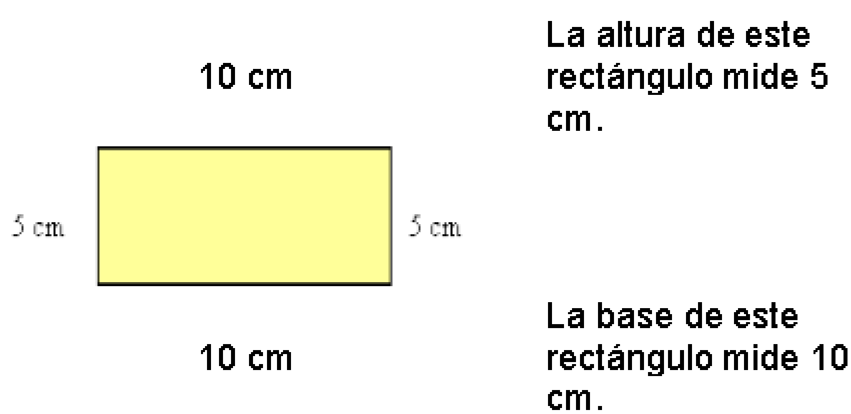


Área: es la medida de la superficie de una figura; es decir, la medida de su región interior. Área de un rectángulo:



El área del rectángulo corresponde a la medida de la región pintada, y se obtiene multiplicando la base por la altura. Área = base · altura

Ejemplo: Los lados del rectángulo de la figura miden 10 cm. y 5 cm.

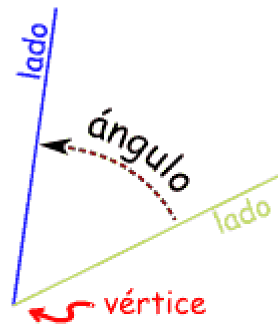


Área = 10 · 5 = 50 cm²

2. *Ángulos y triángulos.*

2.1. Definir el concepto de ángulo y sus unidades de medida: grados sexagesimales y radianes, y el proceso conversión.

El ángulo es la cantidad de giro entre los dos rayos. Las partes de un ángulo son: La esquina de un ángulo se llama vértice y los lados rectos son rayos.

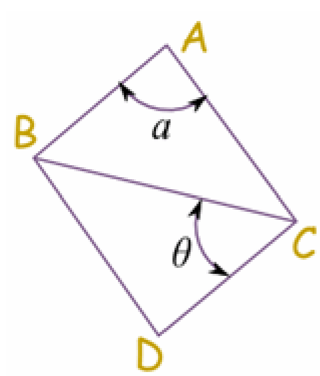


Hay dos maneras comunes de marcar un ángulo:

1. Dándole nombre, normalmente una letra minúscula como **a** o **b**, o a veces una letra griega como **α** (alfa) o **θ** (theta)

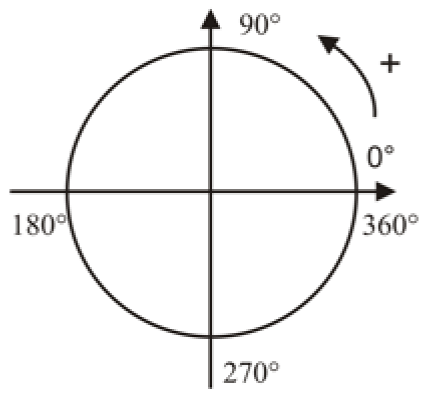
2. Con las tres letras que definen el ángulo, poniendo en medio la letra donde se encuentra (su vértice).

Ejemplo: el ángulo "**α**" es "**BAC**", y el ángulo "**θ**" es "**BCD**"

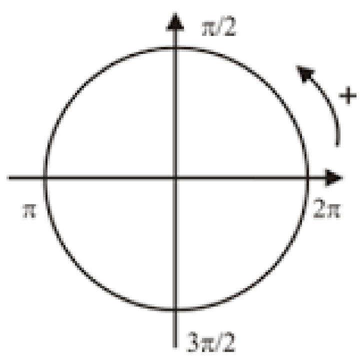


Los "Grados" son la unidad empleada para clasificar los ángulos en las figuras geométricas (generalmente entre dos rectas o segmentos). Existen no obstante varias escalas:

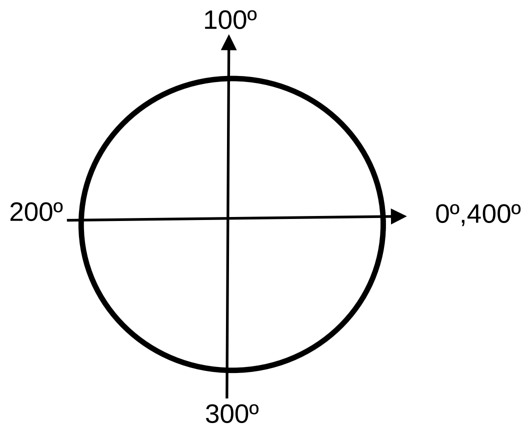
a) Grado sexagesimal (Es el grado "común", cuando la circunferencia se divide en 360 partes iguales. En las calculadoras es la función Degree (Letra D).



b) El radián es la unidad de ángulo plano en el Sistema Internacional de Unidades. Representa el ángulo central en una circunferencia y abarca un arco cuya longitud es igual a la del radio. Su símbolo es rad. En las calculadoras es la letra R.



c) El grado centesimal o gon —también llamado gradián (plural: gradianes) es el resultado de dividir un ángulo recto en 100 unidades, por lo tanto, como la circunferencia tiene 4 ángulos rectos, esta se divide en 400 gradianes. Su símbolo es la "g" minúsculas, en las calculadoras es la función "G" que no debe confundirse con lo grados sexagesimales cuya la letra es la "D". La denominación de gon suele restringirse a los ámbitos especializados de la topografía y la ingeniería civil, donde es muy utilizada esta unidad de medida para definir el valor de los ángulos. La denominación de gradián se emplea en las calculadoras, en las que suele representarse con la abreviatura grad.



Conversiones.

Para convertir grados a radianes, debemos tener en cuenta que:

180º=π

Ejemplo: Convertir 37.8 grados sexagesimales a radianes, se utiliza una regla de tres.

180=π

37.8=X

X=0.21 π radianes.

Para convertir grados a gradianes, se usa:

180º=200º

Ejemplo: Convertir 112.5 grados sexagesimales a gradianes.

180=200

112.5=X

X=125 grados centesimales

Convertir radianes a grados:

π=180º

Ejemplo: Convertir ¼ π a grados sexagesimales.

π=180º

¼ π=X

X=45 grados sexagesimales.

Convertir radianes a gradianes:

π=200º

Ejemplo: Convertir ¾π a gradianes

π=200

¾ π=X

X=150 grados centesimales

Convertir gradianes a grados:

200º=180º

Ejemplo: Convertir 362 gradianes a grados sexagesimal

200=180

362=X

X= 325.8 grados sexagesimales

Convertir gradianes a radianes:

200º=π

Ejemplo: Convertir 171.2 gradianes a radianes

200=π

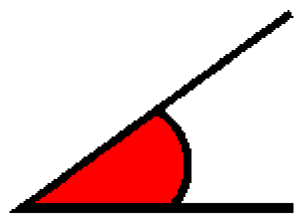
171.2=X

X= 0.856 π radianes

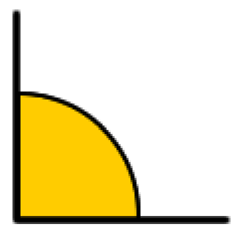
2.2. Los tipos de ángulos.

2.2.1. Clasificación según su medida.

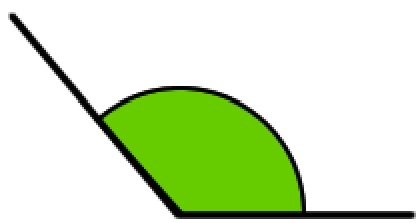
2.2.1.1. El ángulo agudo mide menos de 90°.



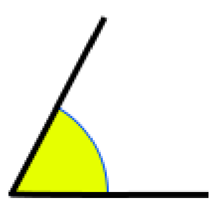
2.2.1.2. El recto mide 90°.



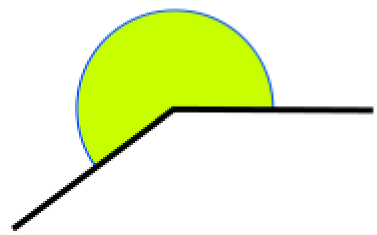
2.2.1.3. El obtuso es aquel que mide más de 90°.



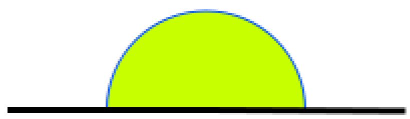
2.2.1.4. El ángulo convexo equivale a más de 0° y menos de 180°



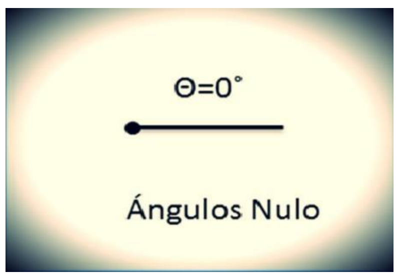
2.2.1.5. El ángulo cóncavo equivale a más de 180° y menos de 360°.



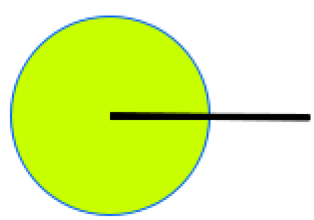
2.2.1.6. El ángulo llano mide 180°.



2.2.1.7. El ángulo nulo mide 0°.

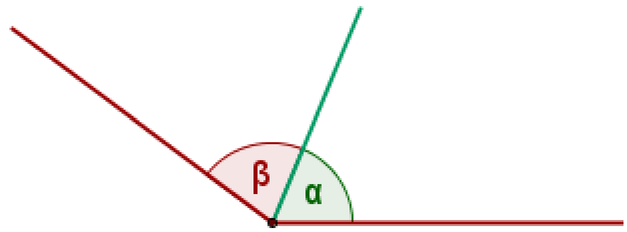


2.2.1.8. El ángulo completo mide 360°.

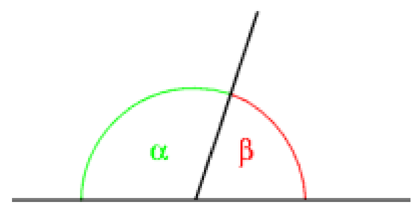


2.2.2. Clasificación según su posición.

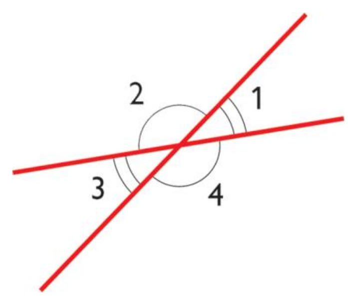
2.2.2.1. Los ángulos consecutivos poseen el mismo vértice y un lado en común.



2.2.2.2. Los ángulos adyacentes, conforman un ángulo llano ya que tienen un vértice y un lado en común y los otros lados ubicados uno en prolongación de otro.



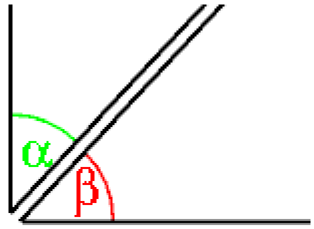
2.2.2.3. Los ángulos opuestos por el vértice son los que comparten el mismo vértice y los lados de uno son la prolongación de los lados del otro.



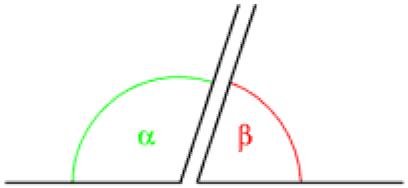
Los ángulos opuestos por el vértice son iguales. De esta manera, los ángulos 1 y 3 son iguales, al igual que 2 y 4.

2.2.3. Clasificación según su suma.

2.2.3.1. Los ángulos complementarios que devienen de la sumatoria de dos ángulos cuyo resultado es de 90°.

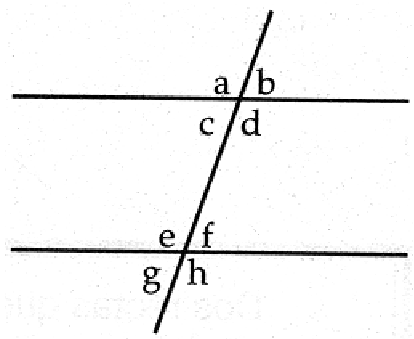


2.2.3.2. Los ángulos suplementarios son el resultado de dos ángulos cuya sumatoria dé como resultado 180°



2.2.4. Ángulos entre paralelas y una recta transversal

2.2.4.1. Ángulos correspondientes. Cualquier par de ángulos en posiciones similares con respecto a la transversal y a cada recta, son llamados ángulos correspondientes.



Los ángulos correspondientes son iguales, por lo tanto:

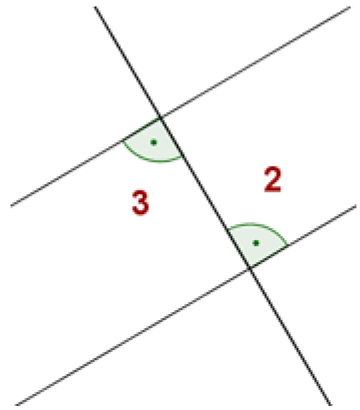
a=e

b=f

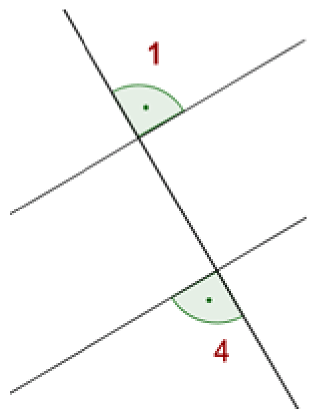
c=g

d=h

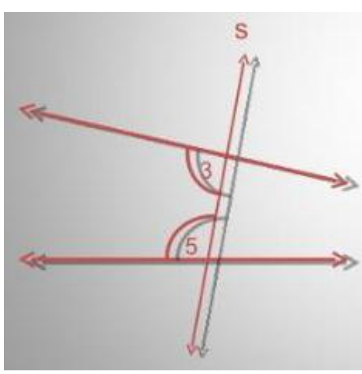
2.2.4.2. Ángulos alternos internos son los que están entre las paralelas a distinto lado de ellas y a distinto lado de la transversal. Dichos ángulos son iguales.



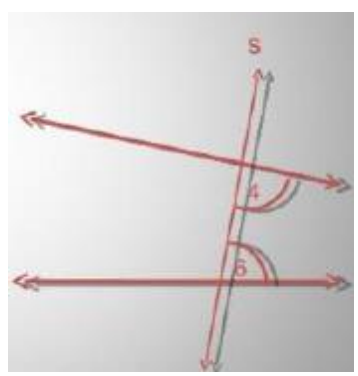
2.2.4.3. Ángulos alternos externos son los que están en la parte exterior de las paralelas a distinto lado de ellas y a distinto lado de la transversal. Dichos ángulos son iguales.



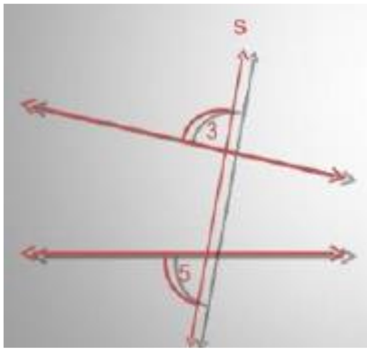
2.2.4.4. Ángulos colaterales internos son los que están entre las paralelas y en el mismo lado de la transversal.

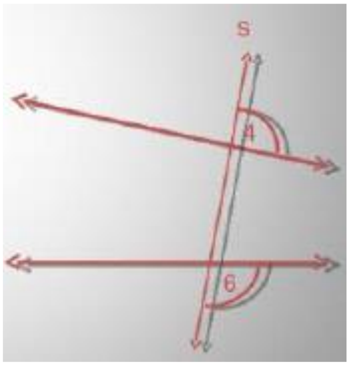


ó



2.2.4.5. Ángulos colaterales externos son los que están fuera de las paralelas y en el mismo lado de la transversal.



ó


2.3. Definir el concepto de triángulo.

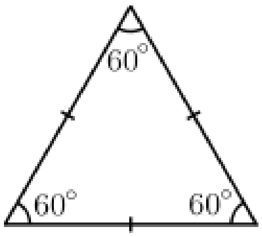
El triángulo es un polígono de tres lados y tres vértices. Los triángulos son los únicos polígonos que no tienen diagonales. La suma de los ángulos internos de cualquier triangulo son 180º

2.3.1. Identificar los triángulos de acuerdo a sus:

2.3.1.1. Lados.

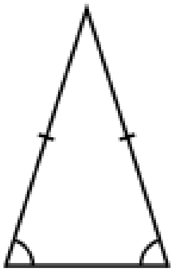
Triángulo equilátero

Si sus tres lados tienen la misma longitud (los tres ángulos internos miden 60 grados).



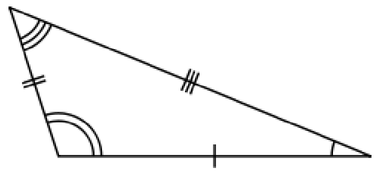
Triángulo isósceles

Si tiene dos lados de la misma longitud. Los ángulos que se oponen a estos lados tienen la misma medida.



Triángulo escaleno

Si todos sus lados tienen longitudes diferentes. En un triángulo escaleno no hay ángulos con la misma medida.

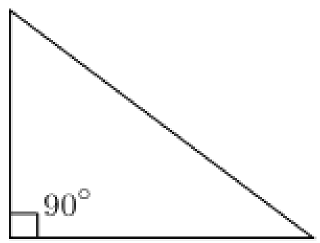


2.3.1.2. Ángulos.

Triángulo Rectángulo

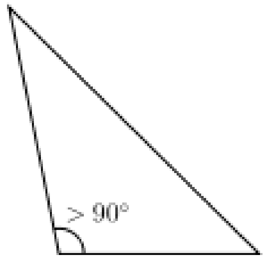
Si tiene un ángulo interior recto

(90∘). A los dos lados que conforman el ángulo recto se les denomina catetos y al otro lado hipotenusa.



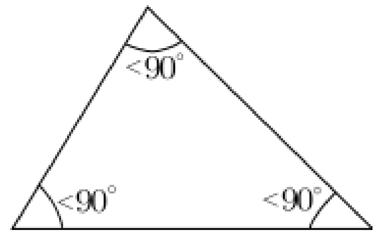
Triángulo obtusángulo

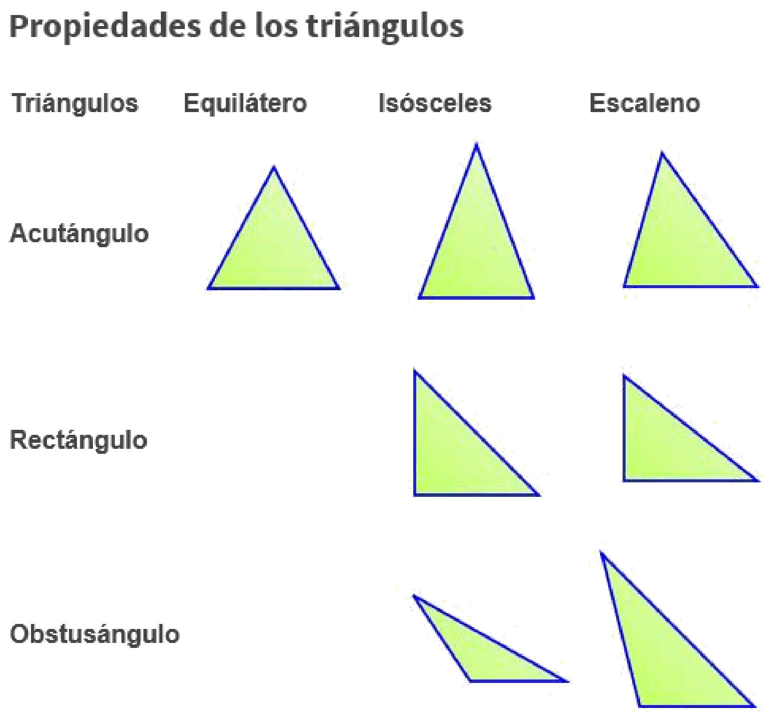
Si uno de sus ángulos es obtuso (mayor de 90∘); los otros dos son agudos (menor de 90∘).



Triángulo acutángulo

Cuando sus tres ángulos son menores a 90∘; el triángulo equilátero es un caso particular de triángulo acutángulo.





Podemos ver en el esquema anterior que las clasificaciones comentadas en el apartado anterior se pueden combinar de dos a dos (una de cada apartado).

Así, tenemos las siguientes características:

•Triángulo acutángulo isósceles: con todos los ángulos agudos, siendo dos iguales, y el otro distinto, este triángulo es simétrico respecto de su altura diferente.

•Triángulo acutángulo escaleno: con todos sus ángulos agudos y todos diferentes, no tiene ejes de simetría.

Los triángulos rectángulos pueden ser:

•Triángulo rectángulo isósceles: con un ángulo recto y dos agudos iguales (de 45∘

cada uno), dos lados son iguales y el otro diferente, naturalmente los lados iguales son los catetos, y el diferente es la hipotenusa, es simétrico respecto a la altura que pasa por el ángulo recto hasta la hipotenusa.

•Triángulo rectángulo escaleno: tiene un ángulo recto y todos sus lados y ángulos son diferentes.

Los triángulos obtusángulos son:

•Triángulo obtusángulo isósceles: tiene un ángulo obtuso, y dos lados iguales que son los que parten del ángulo obtuso, el otro lado es mayor que estos dos.

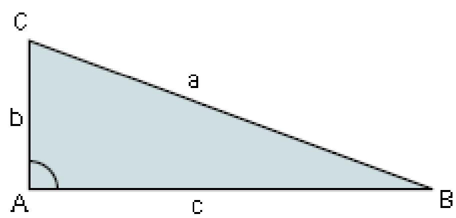
•Triángulo obtusángulo escaleno: tiene un ángulo obtuso y todos sus lados son diferentes.

3. Trigonometría

3.1. Teorema de Pitágoras.

Aunque se llama Teorema de Pitágoras, ¡también lo conocían los matemáticos indios, griegos, chinos y babilonios antes de que él viviera!

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

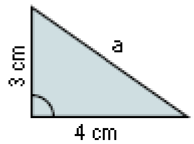
De esta fórmula se obtienen las siguientes:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

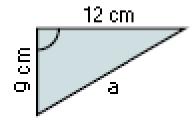
Calcula la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

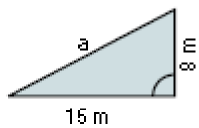


$$a = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

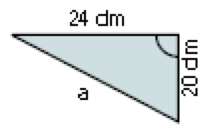
a = 5 cm



a =



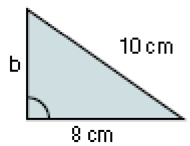
a =



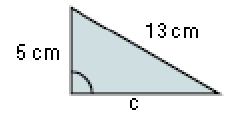
a =

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$

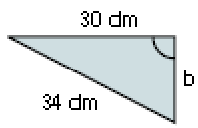
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$



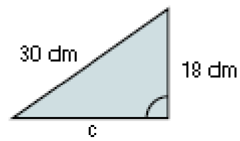
$b = \sqrt{10^2 - 8^2}$



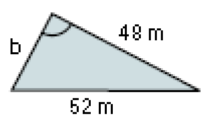
$c = \sqrt{13^2 - 5^2}$



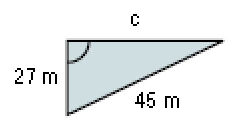
b =



c =

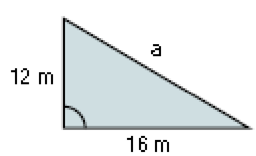


b =

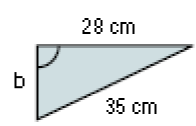


c =

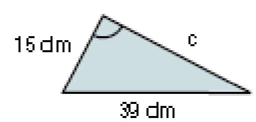
Calcula en cada triángulo rectángulo el lado que falta.



a =

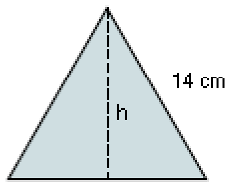


b =

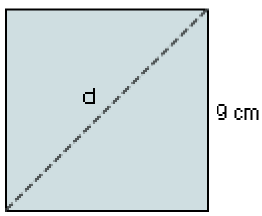


c =

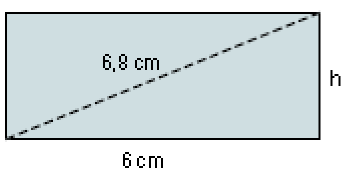
Calcula la altura de un triángulo equilátero de 14 cm de lado.



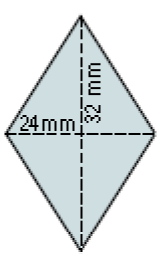
Calcula la diagonal de un cuadrado de 9 cm de lado.



Calcula la altura de un rectángulo cuya diagonal mide 6,8 cm y la base 6 cm.

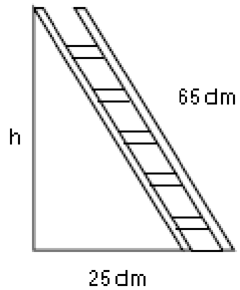


Calcula el lado de un rombo cuyas diagonales miden 32 mm y 24 mm.

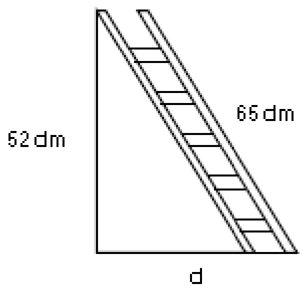


Una escalera de 65 dm de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 25 dm de la pared.

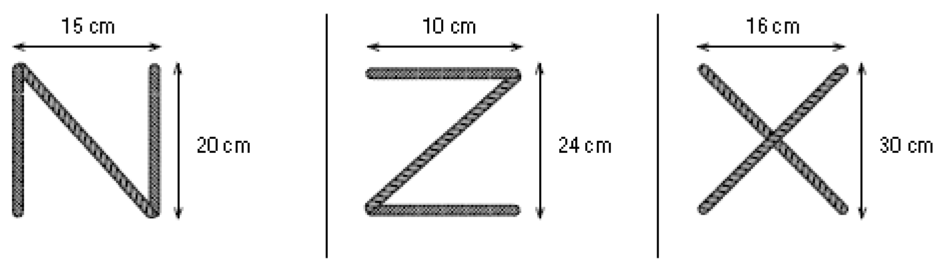
a) ¿A qué altura se apoya la parte superior de la escalera en la pared?



b) ¿A qué distancia de la pared habrá que colocar el pie de esta misma escalera para que la parte superior se apoye en la pared a una altura de 52 dm?



Calcula los centímetros de cuerda que se necesitan para formar las letras N, Z y X de las siguientes dimensiones.



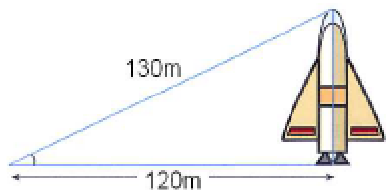
Problemas propuestos:

1) Una ciudad se encuentra 17 km al oeste y 8 km al norte de otra. ¿Cuál es la distancia real lineal entre las dos ciudades?

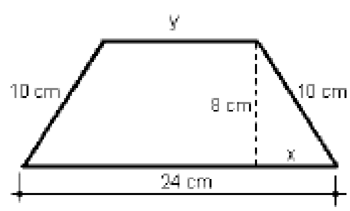
2) Una escalera cuya longitud es de 3 metros se encuentra apoyada contra una pared en el suelo horizontal y alcanza 2,8 m sobre esa pared vertical. La pregunta es: ¿a qué distancia está al pie de la escalera de la base de la pared?

3) Una cáncha de fútbol (rectangular como sabemos) mide 125 metros de largo. Si la longitud de sus diagonales es de 150 metros. ¿cuál es el ancho del campo de juego?

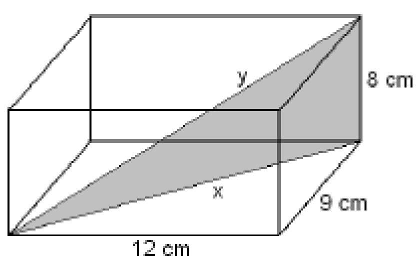
4) Saber utilizar el teorema de Pitágoras para calcular el cateto o la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que conocemos dos de sus lados.



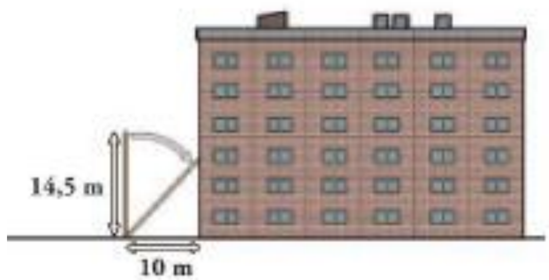
5) Saber determinar triángulos rectángulos en distintas figuras del plano para calcular, a través de Pitágoras, ciertas medidas desconocidas, asociadas a las figuras.



6) Saber determinar triángulos rectángulos en distintos cuerpos del espacio para calcular, a través de Pitágoras, ciertas medidas desconocidas asociadas a esos cuerpos.

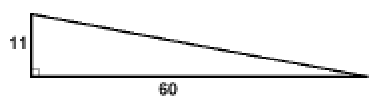


7) Una escalera de bomberos de 14,5 metros de longitud se apoya en la fachada de un edificio, poniendo el pie de la escalera a 10 metros del edificio. ¿Qué altura, en metros, alcanza la escalera?



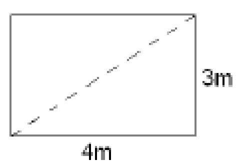
Solución: 10,5m

8) Una rampa de una carretera avanza 60 metros en horizontal para subir 11 metros en vertical. Calcula cuál es la longitud de la carretera.



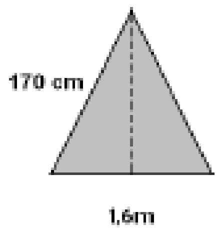
Solución: 61m

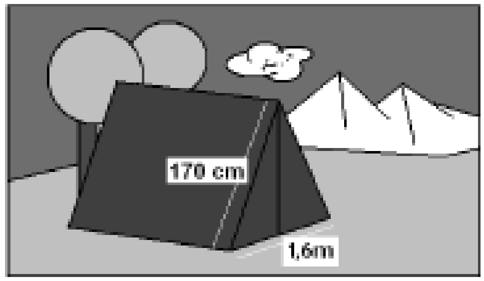
9) El dormitorio de Pablo es rectangular, y sus lados miden 3 y 4 metros. Ha decidido dividirlo en dos partes triangulares con una cortina que une dos vértices opuestos. ¿Cuántos metros deberá medir la cortina?



Solución: 5m

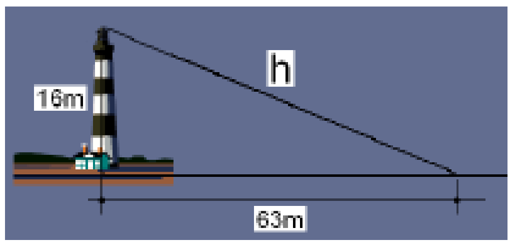
10) La cara frontal de una tienda de campaña es un triángulo isósceles cuya base mide 1,6 metros y cada uno de los lados iguales mide 170 centímetros. Calcula la altura en centímetros de esa tienda de campaña.





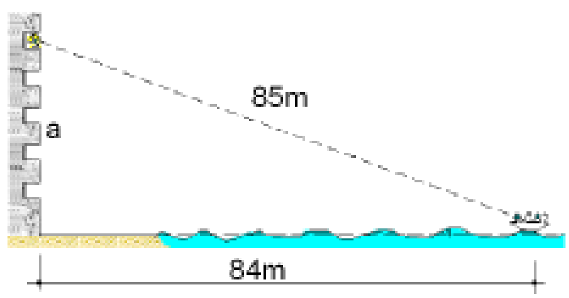
Solución: 150cm

11) Un faro de 16 metros de altura manda su luz a una distancia horizontal sobre el mar de 63 metros. ¿Cuál es la longitud, en metros, del haz de luz?



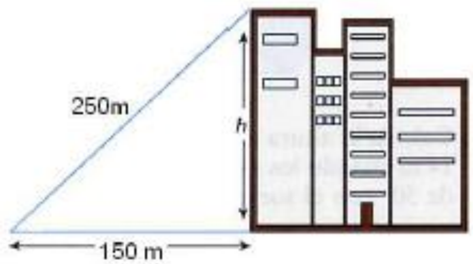
Solución: h=65m

12) Desde un balcón de un castillo en la playa se ve un barco a 85 metros, cuando realmente se encuentra a 84 metros del castillo. ¿A qué altura se encuentra ese balcón?



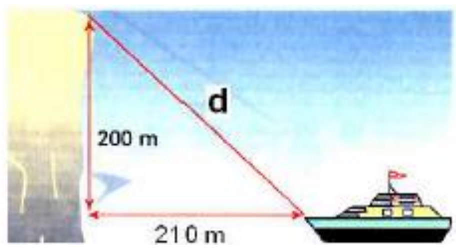
Solución: a=13m

13) Si nos situamos a 150 metros de distancia de un rascacielos, la visual al extremo superior del mismo recorre un total de 250 metros. ¿Cuál es la altura total del rascacielos?



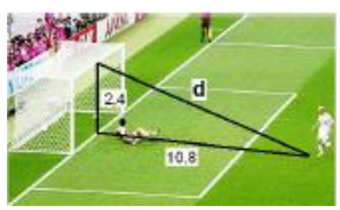
Solución: h=200m

14) Desde un acantilado de 200 metros de altura se observa un barco que se encuentra a 210 metros de dicho acantilado. ¿Qué distancia, en metros, recorre la visual desde el acantilado hasta el barco?



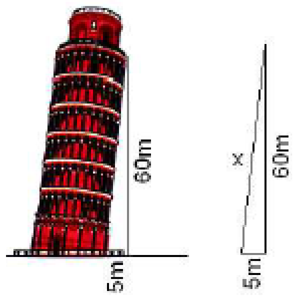
Solución: d=290m

15) La altura de una portería de fútbol reglamentaria es de 2,4 metros y la distancia desde el punto de penalti hasta la raya de gol es de 10,8 metros. ¿Qué distancia recorre un balón que se lanza desde el punto de penalti y se estrella en el punto central del larguero?



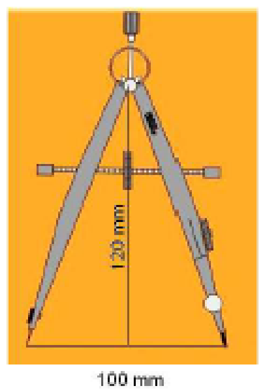
Solución: d=11,06m

16) La Torre de Pisa está inclinada de modo que su pared lateral forma un triángulo rectángulo de catetos 5 metros y 60 metros. ¿Cuánto mide la pared lateral?



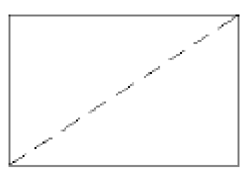
Solución: x=60,21m

17) Un compás de bigotera tiene separadas las puntas de sus patas 100 milímetros, mientras que la vertical desde el eje hasta el papel alcanza una altura de 120 milímetros. ¿Cuál es la medida, en milímetros, de cada una de sus patas?



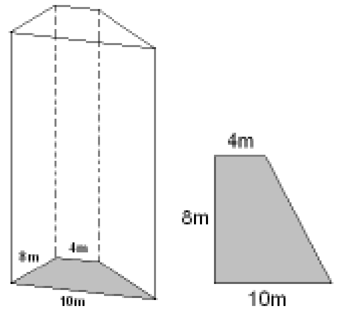
Solución: 109,09mm

18) El dormitorio de Pablo es rectangular; su lado mayor mide 8 metros y su perímetro total mide 28 metros. Ha decidido dividirlo en dos partes triangulares con una cortina que une dos vértices opuestos. ¿Cuántos metros deberá medir la cortina?



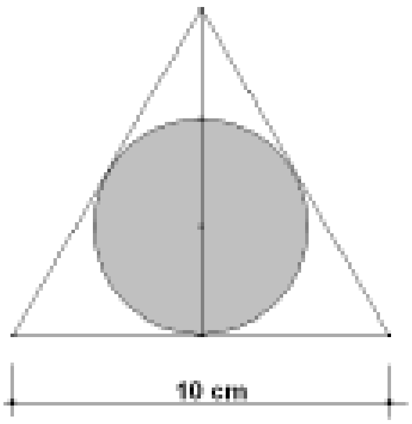
Solución: 10m

19) En la figura se ve la planta de un rascacielos. Es un trapecio rectangular. Calcula la medida del lado oblicuo.



Solución: 10m

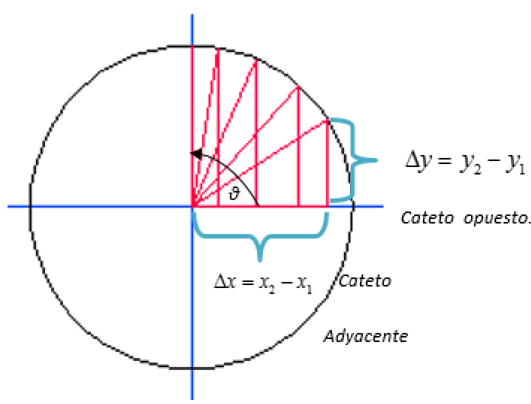
20) En un triángulo equilátero de 10 centímetros de lado se inscribe una circunferencia. Calcula el radio de la circunferencia, sabiendo que es la tercera parte de la altura del triángulo.



Solución: r=2,89cm

3.2. Las funciones trigonométricas.

Las funciones trigonométricas es el conjunto de funciones que se definen en base a un triángulo rectángulo, o bien, de acuerdo a un círculo unitario



Si tenemos que lo máximo que puede medir cada cateto es "UNO" ya que hablamos de un círculo unitario y que las funciones trigonométricas están definidas como:

$$sen = \frac{o}{h} = \frac{1}{\csc} = \frac{\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\Delta y}{(mx+b)}$$

$$\cos = \frac{a}{h} = \frac{1}{\sec} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\Delta x}{(mx+b)}$$

$$\tan = \frac{o}{a} = \frac{sen}{\cos} = \frac{1}{\cot} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\cot = \frac{a}{o} = \frac{\cos}{sen} = \frac{1}{\tan} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$\sec = \frac{h}{a} = \frac{1}{\cos} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\Delta x} = \frac{(mx+b)}{\Delta x}$$

$$\csc = \frac{h}{o} = \frac{1}{sen} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\Delta y} = \frac{(mx+b)}{\Delta y}$$

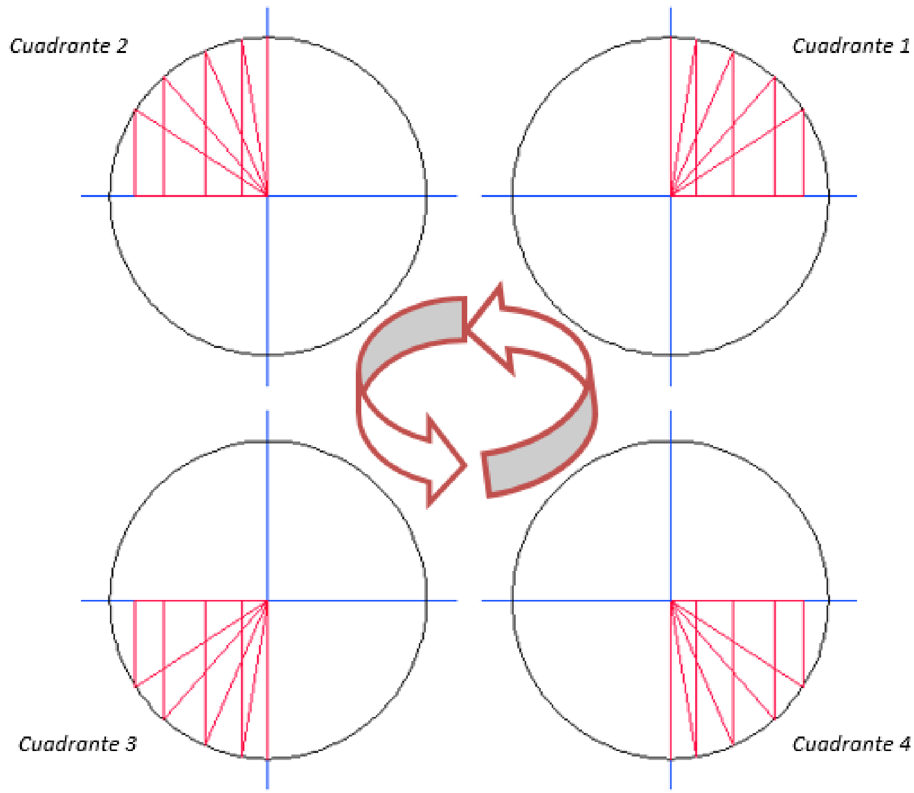
Entonces el seno será "UNO" a los 90° ya que tanto la hipotenusa y el cateto opuesto tendrán radio 1 por el contrario la función coseno será mayor a los 0° ya que tanto el cateto adyacente como la hipotenusa poseerán la longitud del radio. Procesos similares sucederán con el resto de las funciones.

NOTA: Donde los catetos tengan la misma longitud, el valor de las funciones trigonométricas será igual.

Ejemplo:

sen(45) = cos(45)

A continuación, se presenta el resto de los cambios que sufre el triángulo rectángulo en los diferentes cuadrantes:



3.3. La ley de senos y la ley de cosenos.

3.3.1. Teorema o ley del seno

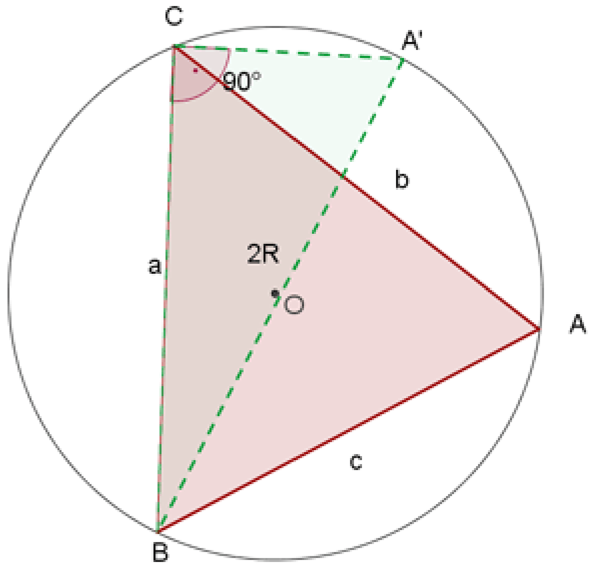
"Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos."

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Aplicaciones:

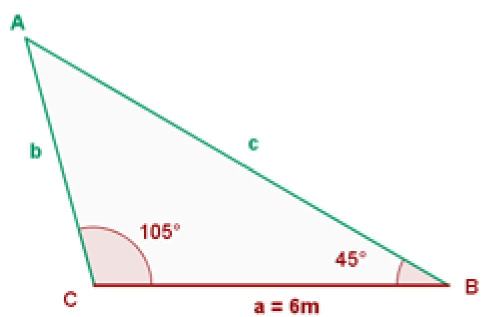
a) Resolver un triángulo cuado conocemos dos ángulos y un lado.

b) Resolver un triángulo cuando conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos



Ejemplo:

De un triángulo sabemos que: a = 6 m, B = 45° y C = 105°. Determina los restantes elementos.



$$A = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ$$

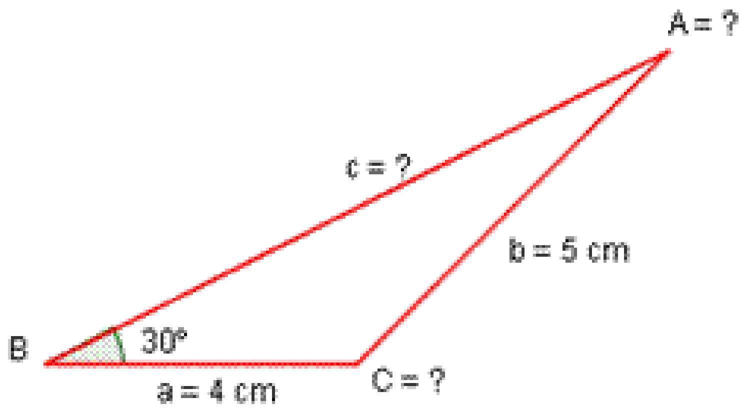
$$\frac{6}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 45^\circ} \qquad b = 6 \cdot \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 6 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2}\,m$$

$$\frac{6}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 105^\circ} \qquad c = 6 \cdot \frac{\operatorname{sen} 105^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 11.6\,m$$

Ejemplo 2:

Resolver un triángulo con los siguientes datos: a = 4 cm, b = 5 cm y B = 30º

- Dibujamos el triángulo, nombramos los ángulos y lados, colocamos los datos conocidos y resolvemos. Resolver un triángulo es decir lo que valen sus 3 ángulos y sus 3 lados.



- Calculamos el ángulo A, conocemos dos lados y el ángulo opuesto a b.

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \frac{4}{\text{sen } A} = \frac{5}{\text{sen } 30º} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{4 \cdot 0{,}5}{5} = 0{,}4$$

$$A = \text{arcseno } 0{,}4 \quad \Rightarrow \mathbf{A = 23{,}58º}$$

- Calculamos c , conocemos dos ángulos y un lado.

El ángulo C: $C = 180º - (23{,}58º + 30) \Rightarrow \mathbf{C = 126{,}42º}$

El lado c aplicando $\dfrac{c}{\text{sen } 126{,}42º} = \dfrac{5}{\text{sen } 30º} \Rightarrow c = \dfrac{5 \cdot \text{sen } 126{,}42º}{\text{sen}30º} \Rightarrow \mathbf{c = 8{,}1\,cm}$

3.3.2. Teorema o ley del coseno

En un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman.

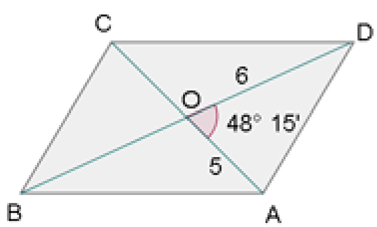
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Aplicaciones:

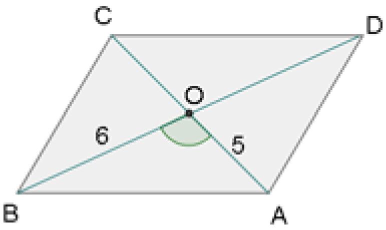
a) Cuando conocemos los 3 lados.
b) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
c) Dos lados y el ángulo que forman.

Ejemplos

Las diagonales de un paralelogramo miden 10 cm y 12 cm, y el ángulo que forman es de 48° 15'. Calcular los lados.



$$AD = \sqrt{5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 48°15'} = 4.5877 cm$$



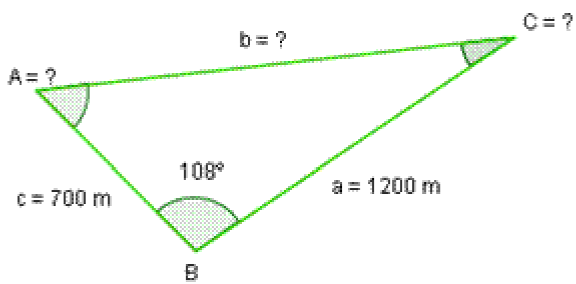
$$180° - 48°15' = 131°45'$$

$$AB = \sqrt{5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 131°45'} = 10.047\, cm$$

Ejemplo

Resolver un triángulo con los datos siguientes: a = 1200 m, c= 700 m y B = 108º

- Dibujamos el triángulo, nos dan 2 lados y el ángulo que forman, calculamos el lado b



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \Rightarrow b = \sqrt{1200^2 + 700^2 - 2\cdot 1200\cdot 700\cdot \cos\ 108} \Rightarrow \mathbf{b = 1564{,}97\ m}$$

- Con a y b conocidos calculamos el ángulo C, despejando $\hat{C}$

$$\operatorname{Cos}\hat{C} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} \Rightarrow \operatorname{Cos}\hat{C} = \frac{700^2 - 1200^2 - 1564{,}97^2}{-2\cdot 1200\cdot 1564{,}97} \Rightarrow \cos C = 0{,}90 \Rightarrow \mathbf{C = 25{,}18^o}$$

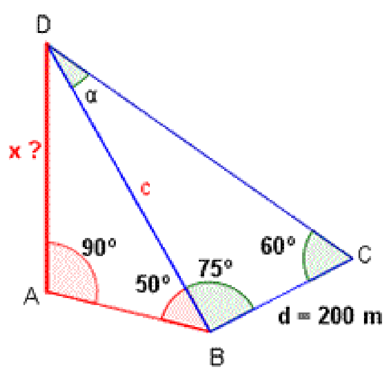
El ángulo C también lo podemos calcular aplicando el teorema del seno.

- Calculamos el ángulo A $\quad A = 180^o - (108^o + 25{,}176^o) \Rightarrow \mathbf{A = 46{,}82^o}$

Aplicaciones de estos teoremas para calcular distancias desconocidas

Calcular una altura desconocida a cuyo pie no se puede llegar

Calcular la altura de la montaña AD



1. **Fijamos dos puntos B y C y medimos su distancia d = 200 m**
2. **Medimos con el teodolito los ángulos ABD = 50°, DBC = 75° y BCD = 60°**
3. **Triángulo BCD calculamos α: α = 180° - (60° + 75) = 45 °**
4. **Aplicamos el teorema del seno para calcular c.**

   $$c = \frac{200.\text{sen}60^\circ}{\text{sen}45^\circ} = 245\ \text{m}$$

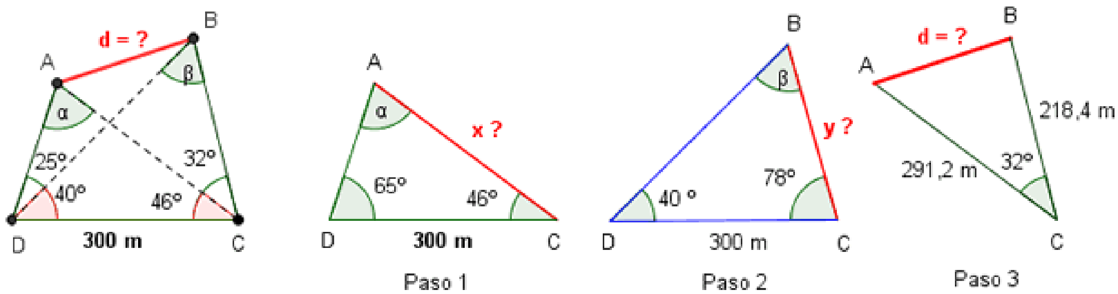
5. **Calculamos x en el triángulo ABD**

   $x = c\ .\ \text{sen}\ 50^\circ\ ;\ c = 245\ .\ \text{sen}\ 50^\circ = 188\ \text{m}$

Calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles

Calcular la distancia entre los puntos inaccesibles A y B

Datos que podemos medir: distancia CD = 300 m. Ángulos: ACB = 32°, ACD = 46°, ADB = 25° y BDC = 40°.



Paso 1. Calculamos x resolviendo el triángulo ACD

$\alpha = 180° - (65° + 46°)\ ;\ \alpha = 69°$ $\qquad x = (300 \cdot \text{sen } 65°) / \text{sen } 69° = 291{,}2 \text{ m}$

Paso 2. Calculamos y resolviendo el triángulo BCD

$\beta = 180° - (40° + 78°) = 62°$ $\qquad y = (300 \cdot \text{sen } 40°) / \text{sen } 62° = 218{,}4 \text{ m}$

Paso 3. Calculamos d aplicando el teorema del coseno al triángulo ACB

$d^2 = (218{,}4)^2 + (291{,}2)^2 - 2 \cdot 218{,}4 \cdot 291{,}2 \cos 32$ $\qquad d = 157 \text{ m}$

Problemas de aplicación.

1. Resolver los siguientes triángulos:

a) a = 1792 m b = 4231 m c = 3164 m Solución: A = 22,75º B = 114,3º C = 42,95º

b) a = 12 m b = 8 m A = 150º Solución: c = 4,27 m B = 19,46º C = 10,53º

c) a = 72 m b = 57 m C = 75,78º Solución: c = 80,12 m A = 60,6º B = 43,62º

* Dibuja los triángulos, nombra sus ángulos y sus lados, añade los datos y resuelve.

2. Supongamos dos puntos A y B, al segundo de los cuales no podemos llegar. Tomando otro punto C, que dista del primero 42,6 m , desde los puntos A y C se dirigen visuales a B, que forman con el segmento AC ángulos BAC = 53,7º y BCA = 64º. ¿Halla la distancia entre A y B?

Solución: 43, 24 m

3. Sean A y B dos puntos inaccesibles, pero visibles ambos desde otros puntos accesibles C y D, separados por la longitud de 73,2 m . Suponiendo que los ángulos ACD = 80,2º BCD = 43,5º BDC = 32º y ADC = 23,23º determinar la distancia AB.

Solución: 22,1 m

3.4. Identidades trigonométricas

Identidades trigonométricas básicas

Las identidades trigonométricas son ecuaciones que involucran las funciones trigonométricas que son verdaderas para cada valor de las variables involucradas.

3.4.1. Recíprocas

$$sen = \frac{o}{h} = \frac{1}{\csc}$$
$$\cos = \frac{a}{h} = \frac{1}{\sec}$$
$$\tan = \frac{o}{a} = \frac{1}{\cot}$$
$$\cot = \frac{a}{o} = \frac{1}{\tan}$$
$$\sec = \frac{h}{a} = \frac{1}{\cos}$$
$$\csc = \frac{h}{o} = \frac{1}{sen}$$

3.4.2. Cociente

$$\tan = \frac{o}{a} = \frac{sen}{\cos}$$
$$\cot = \frac{a}{o} = \frac{\cos}{sen}$$

3.4.3. Pitagóricas

De pitágoras:

$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

$\csc^2 A - \cot^2 A = 1$

3.4.4. Otras

De ángulo doble:

sen2A=2senAcosA

cos2A=$\cos^2 A - sen^2 A$

cos2A=$1 - 2sen^2 A$

cos2A=$2\cos^2 A - 1$

Reduccióndeexponente:

$\operatorname{sen}^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2A$

$\cos^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2A$

$$\tan^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}$$

De multiplicación:

senAcscA=1

tanAcotA=1

$sen\, A \csc A = 1$

cosAsecA=1

Mitad de un ángulo:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cos x$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos x$$

$$2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} - 1 = -\cos x$$

1. $sen(x+y) = sen\,x\ \cos y + \cos x\ sen\,y$
2. $sen(x-y) = sen\,x\ \cos y - \cos x\ sen\,y$
3. $sen\,2x = 2sen\,x\ \cos x$
4. $sen\,x = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$
5. $\cos(x+y) = \cos x\ \cos y - sen\,x\ sen\,y$
6. $\cos(x-y) = \cos x\ \cos y + sen\,x\ sen\,y$
7. $\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x$
8. $\cos\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$
9. $sen\,x + sen\,y = 2sen\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
10. $sen\,x - sen\,y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}sen\dfrac{x-y}{2}$
11. $\cos x - \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
12. $\cos x - \cos y = -2sen\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
13. $2sen\,x\ sen\,y = -\cos(x+y) + \cos(x-y)$
14. $2sen\,x\cos y = sen(x+y) + sen(x-y)$
15. $2\cos x\ sen\,y = sen(x+y) - sen(x-y)$
16. $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$
17. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
18. $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
19. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan x^2}$
20. $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{sen\,x}$

$\text{sen}(A \pm B) = \text{senAcosB} \pm \text{cosAsenB}$

$\text{cos}(A \pm B) = \text{cosAcosB} \pm \text{senA} \pm \text{senB}$

$\text{senA+senB=2sen}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$

$\text{cosA+cosB=2cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$

$sen\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}sen(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}sen(\alpha-\beta)$

$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$

$sen\alpha sen\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$

Ejemplos:

Ejemplo:

Simplifique la expresión usando identidades trigonométricas.

$$1-\frac{\sin^2\theta}{\tan^2\theta}$$

Reescriba tan como sin/cos.

$$=1-\frac{\sin^2\theta}{(\sin^2\theta/\cos^2\theta)}$$

$$=1-(\sin^2\theta)\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=1-\cos^2\theta$$

$$=\sin^2\theta$$

Usando la identidad pitagórica fundamental, obtenemos

$$=\sin^2\theta$$

Example:

Muestre que $\sec^2\theta+\csc^2\theta=\sec^2\theta\cdot\csc^2\theta$

$$\begin{aligned}\sec^2\theta+\csc^2\theta &= \frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta} && \text{(Identidad recíproca)}\\ &= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}\\ &= \frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta} && \text{(Identidad pitagórica)}\\ &= \frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}\\ &= \sec^2\theta\cdot\csc^2\theta && \text{(Identidad recíproca)}\end{aligned}$$

Ejemplo:

Verifique la identidad $\cos\theta + \sin\theta\tan\theta = \sec\theta$

Considere la expresión en el lado izquierdo de la ecuación.

$$\cos\theta + \sin\theta\tan\theta$$

$$= \cos\theta\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\right) + \sin\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \quad \text{(Identidad cociente)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{(Identidad pitagórica)}$$

$$= \sec\theta$$